DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

OPTION M

(Temps accordé : 4 heures)

PARTIE I

Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

et $H_0(x) = 1$

I.1 - Montrer que la fonction H_n ainsi définie est polynômiale, de degré n.

I.2 - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2xH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1}$$

$$(2x - \frac{d}{dx})H_n = H_{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} H_n = 2n H_{n-1}$$

I.3 - Pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$, calculer $H_i(x)$.

Montrer que H_n est un polynôme de même parité que n. Quel est le coefficient du terme de degré n ?

I.4 - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, H_n a n racines réelles distinctes (on pourra, par exemple, raisonner par récurrence, en étudiant les variations des dérivées successives de $x \mapsto e^{-x^2}$).

.../...

I.5 - Trouver une équation différentielle linéaire du 2° ordre satisfaite par H_n.

I.6 - Pour $(s,x) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\Psi(s,x) = \exp(-s^2+2sx)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = \frac{\partial^n \Psi}{\partial s^n}(0,x)$$

Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telles que :

i) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; on notera $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f, avec $f^{(0)} = f$;

ii) $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(n)}(x)|$ existe dans $\mathbb{R}$

On note $\cdot$ la loi : $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ $(\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$ si $x \in \mathbb{R}$

PARTIE II

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois + et $\cdot$

II.1 - Que dire de la structure de $(E,+,\cdot, \times)$?

On pose $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f_2(x) = e^{-x}$; $f_3(x) = e^{-|x|}$; $f_4(x) = e^{-x^2}$

Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, f_i appartient-elle à E ? Justifier la réponse.

II.2 - Montrer :

a) - que $(f \in E) \Longrightarrow (\forall (k,n,p) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p |f^{(n)}(x)|^k dx$ existe)

b) - que l'application : $(f,g) \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = (f|g)$ est définie sur E x E et qu'on obtient ainsi un produit scalaire. On notera $\| \ \|$ la norme associée.

II.3 - a) - Soit ϕ un endomorphisme de E dans E ($\phi \in \mathcal{L}(E)$). Soit u une application de E dans E telle que :

$\forall (f,g) \in E \times E$, $(f | \phi(g)) = (u(f)|g)$

Prouver que u est linéaire et qu'une telle application, quand elle existe, est unique.

On appelle alors u l'adjoint de ϕ et on le note ϕ^*. Vérifier les propriétés suivantes, ϕ et ψ étant deux endomorphismes de E ayant des adjoints :

$$(\phi^*)^* = \phi \quad ; \quad (\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^* \quad ; \quad (\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$$

b) - Pour $(\phi,\psi) \in (\mathcal{L}(E))^2$, on pose $[\phi,\psi] = \phi\circ\psi - \psi\circ\phi$ (commutateur de ϕ et ψ). Montrer que :

$\forall (A,B,C) \in (\mathcal{L}(E))^3$, $[A\circ B,C] = A\circ[B,C] + [A,C]\circ B$ et

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

PARTIE III

Soit I,X,D les applications définies pour $f \in E$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[I(f)](x) = f(x)$; $[X(f)](x) = xf(x)$; $[D(f)](x) = f'(x)$.

III.1 - Montrer que $(X,D) \in (\mathcal{L}(E))^2$

III.2 - On pose $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+D)$. Montrer que X^* et D^* existent et les calculer.

Mêmes questions pour A^* et N^*, où $N = A^* \circ A$.

Calculer les commutateurs $[X,D]$, $[A,A^*]$, $[N,A]$, $[N,A^*]$.

III.3 - Montrer que la valeur du commutateur $[A,A^*]$ impose à E d'être de dimension infinie (on pourra, par exemple, utiliser une propriété de la trace).

PARTIE IV

Pour $f \in E$, on pose $H(f) = \frac{1}{2}(-D^2+X^2)(f)$ où $D^2 = D_oD$ et $X^2 = X_oX$.

On se propose de chercher les vecteurs propres et les valeurs propres de H.

IV.1 - Trouver une relation simple entre H, N et I.

IV.2 - Soit φ un vecteur propre de H, de valeur propre λ .

a) - Montrer que φ est vecteur propre de H. Quelle est la valeur propre associée ?

b) - Montrer que $A(\varphi)$ est soit nul, soit vecteur propre de H avec la valeur propre $(\lambda-1)$. Etablir un résultat analoque pour $A^*(\varphi)$.

c) - Montrer que $\lambda \geqslant 0$ (on pourra utiliser $(H\varphi \mid \varphi)$).

IV.3 - On étudie le cas $\lambda = 0$, et on pose :

$$E_o = \{ \varphi \in E,\ H(\varphi) = 0 \}$$

$$F_o = \{ \varphi \in E,\ A(\varphi) = 0 \}$$

a) - Montrer que $F_o \subset E_o$

b) - Soit φ_o l'unique application telle que :

$$\varphi_o \in F_o,\ \varphi_o(0) > 0,\ \| \varphi_o \| = 1$$

Calculer $\varphi_o(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déterminer entièrement F_o.

(On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$).

c) - Montrer que $F_o \subset F_o$ (on pourra, par exemple, chercher $f \in F_o$ sous la forme $f = g \times \varphi_o$ en n'oubliant pas que $f \in E$).

IV.4 - Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

(1) φ_o définie en IV.3 - b)

(2) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} A^*(\varphi_{n-1})$

a) - Montrer que :

- φ_n est vecteur propre de H, de valeur propre n ;
- $A(\varphi_n) = \sqrt{n}\ \varphi_{n-1}$
- $\| \varphi_n \| = 1$

b) - n étant donné dans $\mathbb{N}$, montrer que :

$$\{ f \in E, H(f) = nf \} = \{ t\varphi_n,\ t \in \mathbb{R} \}$$

c) - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $(\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une famille libre de E. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel est le noyau de A^k ?

d) - Montrer que si λ est valeur propre de H, alors $\lambda \in \mathbb{N}$ (on introduira m, partie entière de λ).

IV.5 - a) - Déduire des questions précédentes les valeurs propres et les vecteurs propres de H.

b) - Montrer que $\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$ où H_n est le polynôme de la partie I.

c) - Représenter sur un même graphique les fonctions φ_o, φ_1, φ_2.